FÍSICA EXPERIMENTAL

INCERTIDUMBRE ABSOLUTA Y RELATIVA

- Medición de la longitud del largo del cuaderno:

$$(29{,}5 \pm 0{,}1)cm$$

$0{,}1cm$ representa la incertidumbre absoluta de la medida

- ¿Qué tan significativa es esa incertidumbre?

$(29{,}5 \pm 0{,}1)cm$	puede ser significante
Kilómetros $\pm 0{,}1cm$	insignificante
Micrómetros $\pm 0{,}1cm$	carece de sentido

$$incertidumbre \cdot relativa = \frac{incertidumbre \cdot absoluta}{valor \cdot medido}$$

- Incertidumbre relativa se expresa en porcentaje:

$$\frac{0{,}1cm}{29{,}5cm} = 0.003 \Rightarrow 0{,}3\% \therefore \; precisión \cdot de \cdot la \cdot medida$$

Incertidumbre absoluta: cantidad con dimensiones
Incertidumbre relativa: cantidad adimensional, es un número

ERROR SISTEMÁTICO

Lectura afectada siempre de igual forma y consistentemente
Error *no visible* de inmediato pero *presente* en una medición

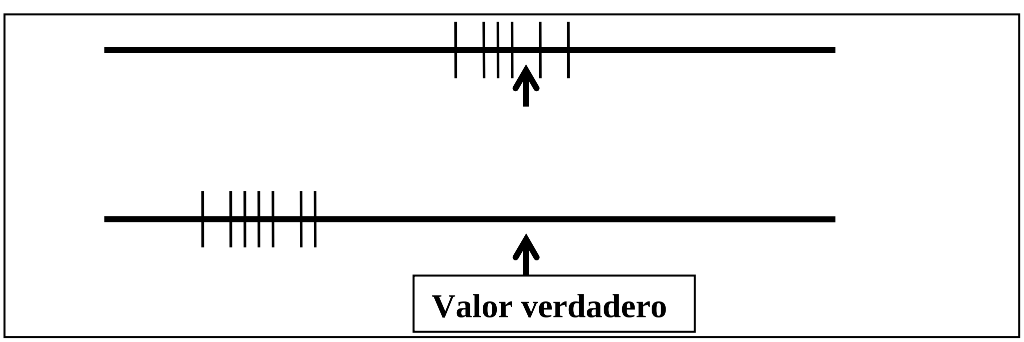
- ◊ Posición cero no ajustada en instrumentos
- ◊ Reacción humana: apretar botón de un cronómetro
- ◊ Calibración de los instrumentos

No se deje engañar: verifique calibración de instrumentos

ERROR ESTADÍSTICO

Lectura que varía y es igualmente probable por encima o debajo del valor verdadero o esperado

- Están siempre presentes en todo experimento
- En ausencia de errores sistemáticos, cada lectura cae alrededor del valor verdadero o esperado
- En presencia de errores sistemáticos, cada lectura cae no alrededor del valor verdadero sino de un valor desplazado



*SE DEFINE ERROR SISTEMÁTICO Ó ERROS ESTADÍSTICO DEPENDIENDO DE
SI ELLOS PRODUCEN UN EFECTO SISTEMÁTICO Ó ESTADÍSTICO (AL AZAR)*

NO PODEMOS DECIR QUE CIERTA FUENTE DE ERROR ES INHERENTEMENTE SISTEMÁTICA Ó ESTADÍSTICA

UNA MISMA FUENTE DE ERROR PUEDE DAR LUGAR A EFECTOS SISTEMÁTICOS O ESTADÍSTICOS

EXACTITUD Y PRECISIÓN

Un resultado es exacto si es libre de errores sistemáticos

Un resultado es preciso si el error estadístico es mínimo

- Los errores estadísticos se estiman por métodos estadísticos
- Un tratamiento único para los errores sistemáticos no existe: Usted debe considerarlos como efectos a ser descubiertos y eliminarlos o minimizarlos.

TRATAMIENTO ESTADÍSTICO DE UNA SOLA VARIABLE

Suposiciones:

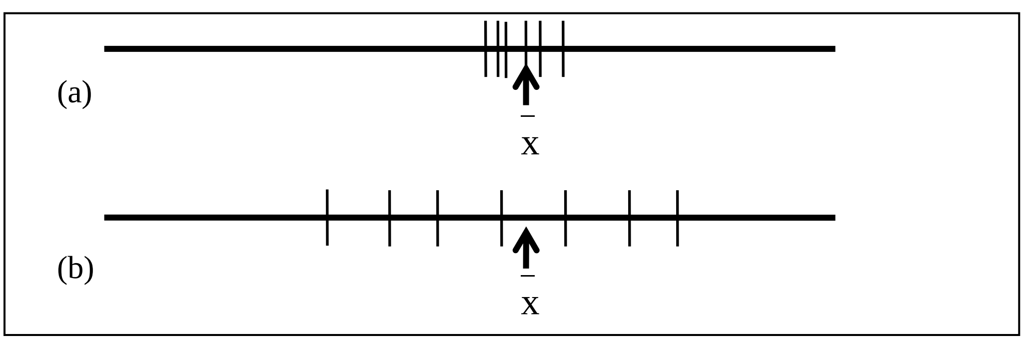
- Libre de errores sistemáticos
- Conjunto de mediciones de una misma cantidad

  $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots etc.$

- Cada x_i varía con su error estadístico
- El valor medio, $\bar{X}$, se toma como el mejor valor
- Pero $\bar{X}$ NO SERÁ IGUAL al valor verdadero X
- La pregunta es: ¿qué tan cercano está $\bar{X}$ de X ?

TODO LO QUE PODEMOS DECIR ES QUE HAY UNA CIERTA PROBABILIDAD DE QUE X CAIGA DENTRO DE UN CIERTO RANGO CENTRADO EN $\bar{X}$

- ¿cómo calcular este rango para alguna probabilidad específica?



- Cualitativamente: entre mayor sea la dispersión de los datos mayor será el error esperado en $\bar{X}$
- ¿Cuantitativamente?

DISTRIBUCIÓN

Conjunto de medidas x_i

$$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Ejemplo: Mediciones de una resistencia

R(Ω)	4,615	4,638	4,597	4,634	4,613	4,623
	4,659	4,623				

Valor medio 4,625 Ω

REQUERIMOS UNA CANTIDAD QUE NOS DÉ UNA MEDIDA DE LA DISPERSIÓN DE LOS OCHO (n) DATOS DE LA CUAL SE PUEDE ESTIMAR EL ERROR EN LA MEDIA

Entonces, CONCEPTO DE DISTRIBUCIÓN

El conjunto de n mediciones es una muestra al azar tomada de una distribución de N mediciones (N muy grande, vgr 10000000)

Cualquier conjunto de mediciones se puede representar con un histograma (válido para n o para N mediciones)

HISTOGRAMA – FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

- Histograma: dividir rango de los valores medidos en intervalos iguales; contar cuántas medidas hay en cada intervalo.
- Ancho del intervalo es arbitrario
- Si N>>1 – ancho de intervalo muy pequeño – se tiene distribución continua:

Fracción de N lecturas en cada intervalo como función del valor de la medición

Función de distribución $f(x)$
Fracción de N lecturas que caen entre x y $x+dx$ es:

$$f(x)dx:$$

probabilidad de que una de las medidas x_i caiga entre x y $x+dx$

La función de distribución cumple con la relación:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

y el promedio, notado con los paréntesis $\langle\ \rangle$, sobre todas las mediciones se define como:

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

En ausencia de errores sistemáticos $\langle x\rangle$ debe ser igual al valor verdadero X .

ERROR ESTÁNDAR

El error e en una medición x se define:

$$e = x - X$$

La desviación estándar σ de la distribución se define como el valor cuadrático medio de e para todas las mediciones en la distribución:

$$\sigma^2 = \langle e^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - X)^2 f(x) dx$$

La desviación estándar es una medida del ancho de la distribución, es decir, de la dispersión de las mediciones

Error estándar E de la media:

$$e_i = x_i - X$$

$$E = \bar{x} - X = \left(\frac{1}{n} \sum x_i \right) - X = \frac{1}{n} \sum (x_i - X) = \frac{1}{n} \sum e_i$$

$$E^2 = \frac{1}{n^2} \sum e_i^2 + \frac{1}{n^2} \sum_i \sum_{j \neq i} e_i e_j$$

El promedio de $\sum e_i^2$ es $n\langle e^2 \rangle$, entonces:

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{n} \langle e^2 \rangle$$

Por definición:

$$\sigma_m^2 = \langle E^2 \rangle \cdot ; \cdot \sigma^2 = \langle e^2 \rangle$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

INCERTIDUMBRE EN CANTIDADES CALCULADAS

Propagación del error

¿Máximo margen de posibilidad para un valor calculado?

Incertidumbre en medidas originales afectará el valor final calculado!!!!!

Ej. Cálculo del volumen de un cuerpo:

¿Cuántos métodos conoce que le permitan conocer el volumen de un cuerpo?

¿Cúal es el más preciso?

Incertidumbre en cantidades calculadas:

Una sola variable

Medida: $x_0 \pm \delta x$

Si $z = f(x)$

significa que podemos calcular z_0 a partir de un x_0 medido

$$z_0 \pm \delta z$$

$\boxed{\text{¿Cúanto es } \delta z \text{ ?}}$

Ej. $z = x^2$ $\quad x = x_0 \pm \delta x$

$$z_0 \pm \delta z = \left(x_0 \pm \delta x\right)^2 = x_0^2 \pm 2x_0 \delta x + \left(\delta x\right)^2$$

Si $\delta x \langle\langle x_0$ $\quad \delta z = 2x_0 \delta x$

$$\frac{\delta z}{z_0} = \frac{2x_0 \delta x}{x_0^2} = 2\frac{\delta x}{x_0}$$

Incertidumbre relativa en z = dos veces incertidumbre relativa en x

- Las diferencias finitas δz y δx se pueden expresar en forma de la derivada:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \Rightarrow \delta z = \frac{df(x)}{dx}\delta x$$

- Ej. $$z = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\left(x^2+1\right) - x \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$\delta z = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\,\delta x$$

$$\frac{\delta z}{z_0} = \frac{1-x_0^2}{1+x_0^2}\,\frac{\delta x}{x_0}$$

- Potencias:

$$z = x^n \Rightarrow \frac{dz}{dx} = nx^{n-1} \Rightarrow \delta z = nx^{n-1}\delta x \Rightarrow$$

$$\frac{\delta z}{z} = n\frac{\delta x}{x}$$

Exponente mayor, mayor la necesidad de una alta precisión inicial!!!!

- **Funciones trigonométricas:**

$$z = senx \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \cos x \Rightarrow \delta z = (\cos x)\delta x$$

Pero se entiende mejor si:

$$x_0 \pm \delta x \Rightarrow z \pm \delta z = sen(x_0 \pm \delta x) = senx_0 \cos(\delta x) \pm \cos x_0 sen(\delta x)$$

Si: $\cos(\delta x) \approx 1 \Rightarrow$

$$z \pm \delta z = senx_0 \pm \cos x_0 sen(\delta x) \therefore \delta z = \cos x_0 sen(\delta x)$$

La incertidumbre δx *es en realidad* $sen(\delta x)$ *si* $\delta x \langle\langle 1 radian$

- **Funciones logarítmicas y exponenciales:**

$$z = \log x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \delta z = \frac{1}{x}\delta x \Rightarrow \frac{\delta z}{z} = \frac{1}{\log x}\frac{\delta x}{x}$$

$$z = e^x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = e^x \Rightarrow \delta z = e^x \delta x \Rightarrow \frac{\delta z}{z} = x\frac{\delta x}{x}$$

Incertidumbre en cantidades calculadas funciones de dos ó más variables:

$$z = x + y$$
$$z_0 \pm \delta z = (x_0 \pm \delta x) + (y_0 \pm \delta y)$$
$$\delta z = \delta x + \delta y$$
$$\frac{\delta z}{z} = \frac{\delta x + \delta y}{x + y}$$

- Si $z = x - y \Rightarrow \delta x \wedge \delta y \langle\langle$ y $(x - y)\langle\langle \Rightarrow \frac{\delta z}{z}$ <u>puede ser muy grande!!!!</u>
- Con las derivadas:

$$z = f(x, y)$$
$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$
$$\delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y$$

Ej: Producto

$$z = xy \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = y \wedge \frac{\partial z}{\partial y} = x$$
$$\delta z = y\delta x + x\delta y$$
$$\frac{\delta z}{z} = \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y}$$

- Producto con exponentes:

$$z = x^a y^b$$

$$\log z = a \log x + b \log y$$

$$\frac{dz}{z} = a\frac{dx}{x} + b\frac{dy}{y}$$

$$\frac{\delta z}{z} = a\frac{\delta x}{x} + b\frac{\delta y}{y}$$

Ej.

$$z^2 = xy$$

$$z = x^{1/2} y^{1/2} no \cdot se \cdot necesita$$

$$2\log z = \log x + \log y$$

$$2\frac{\delta z}{z} = \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y}$$

CIFRAS SIGNIFICATIVAS

- Los resultados deben ser dados de tal manera que el valor final de la variable y su incertidumbre sean consistentes:

$$V = 15{,}4 \pm 0{,}1 Voltio$$
$$I = 1{,}7 \pm 0{,}1 Amperio$$

Si $$R = \frac{V}{I} = 9.0588235$$
$$Valor \cdot dado \cdot por \cdot la \cdot calculadora$$

¿Cuánto es el δR ?

$$\delta R = \frac{1}{I}\delta V - \frac{V}{I^2}\delta I = 0{,}59 \cdot Ohmios$$

$$R = 9{,}06 \pm 0{,}59 \cdot Ohmios$$

- Pero si $\delta V = 0{,}1 V \wedge \delta I = 0{,}1 A$
es decir, una sola cifra significativa!!!!

- **Entonces R debe tener tambien una sola cifra significativa!!!!**

$$R = 9{,}1 \pm 0{,}6 \cdot Ohmios$$

- Debemos evitar afirmaciones del tipo:

$$z = 1{,}234567 \pm 0{,}1$$
$$z = 1{,}2 \pm 0{,}000001$$

PRINCIPIO DE MÍNIMOS CUADRADOS

- Determinación de la mejor línea para un conjunto de puntos dados no por método gráfico sino un procedimiento matemático
- Lo ideal es encontrar una línea recta que se ajuste a los valores medios
- Consideramos el caso en el que la incertidumbre se limita a la variable y; variable x se mida con bastante precisión
- ¿Cúal es la mejor línea?, ¿Qué significa la mejor línea?
- Definiremos la mejor línea aquella que minimiza la suma de los cuadrados de las desviaciones P_2O_2

$$\sum \left(P_i Q_i \right)^2$$

$$y = mx + b$$

- La magnitud de las desviación P_iQ_i es el intervalo entre un cierto valor medido y_i y el valor de y en ese punto para le valor de x.
- Este valor y se puede calcular a partir del valor correspondiente de x como $mx_i + b$
- Si llamamos δy_i a cada diferencia, entonces:

$$\delta y_i = y_i - \left(mx_i + b\right)$$

- El criterio de mínimos cuadrados nos dice:

$$\sum \left[y_i - \left(mx_i + b\right)\right]^2 = mínimo = M$$

- La condición para un mínimo:

$$\frac{\partial M}{\partial m} = 0 \cdot \wedge \cdot \frac{\partial M}{\partial b} = 0$$

- Haciendo los cálculos llegamos a obtenre entonces valores de la pendiente y la ordenada al origen de la ***mejor línea***:_

$$m = \frac{N\sum\left(x_i y_i\right) - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum\left(x_i y_i\right)}{N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

- De este método y estas definiciones podemos calcular tambien la disviación estándar de la pendiente y de la ordenada al origen, Esto nos da INCERTIDUMBRES ESTADÍSTICA

- La desviación estándar de la pendiente y la ordenada al origen se calculan en términos de la desviación estándar de una distribución de valores δy alrededor de la mejor línea:

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum (\delta y_i)^2}{N-1}}$$

$$S_m = S_y \times \sqrt{\frac{N}{N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}}$$

$$S_b = S_y \times \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}}$$

- El método de mínimos cuadrados nos proporciona valores estadísticamente significativos de las incertidumbres en la pendiente *m* y el corte con el eje *b* y al origen, las cuales dependen de la dispersión real de los puntos

El COEFICIENTE DE CORRELACIÓN :

- Importante en dos casos significativos:

1. Si de dos variables medidas una puede considerarse como causa de la otra, pero su efecto está parcialmente encubierto por las fluctuaciones al azar
2. Si dos variables pueden considerarse como consecuencia simultánea de una causa común, cuyo efecto está parcialmente oculto por fluctuaciones al azar

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \sum y^2}}$$