Universidad del Valle- Departamento de Física
Examen de Admisión al Doctorado en Ciencias-Física
09 de Mayo de 2014

Mecánica Clásica

Nombre:	

Se propone resolver uno de estos dos problemas

Problema 1. El péndulo esférico consta de una partícula de masa *m* atada a un punto fijo por una cuerda ideal de longitud *l* y que se mueve en presencia de un campo gravitacional; a diferencia del péndulo simple, el péndulo esférico no está sujeto a moverse en un plano vertical.

(a) Demuestre que la función de Lagrange de este sistema es

$$L = \frac{ml^2}{2}\left[\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right] + mgl\cos\theta\,.$$

(b) Encuentre los momentos canónicos y a partir de ellos halle el Hamiltoniano del sistema. Escriba las ecuaciones de Hamilton

(c) Identifique las coordenadas cíclicas y diga cuál es su significado físico.

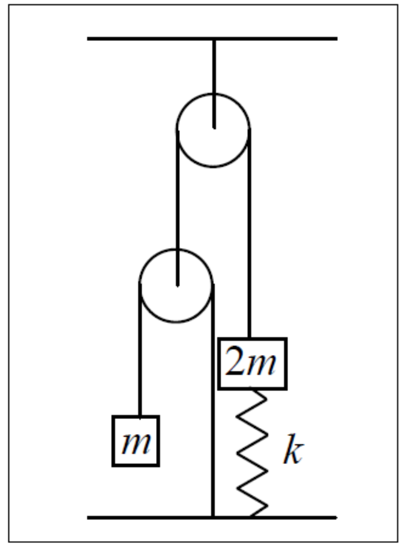
(d) Demuestre a partir de las ecuaciones del movimiento que la energía mecánica total del péndulo esférico se conserva.

Problema 2. Considere el sistema que se muestra en la figura**.** Suponga que las poleas, las cuerdas y los resortes tienen masa despreciable y no hay fricción.

(a) Determine la extensión máxima del resorte cuando el sistema se encuentra en equilibrio.

(b) Escriba las ecuaciones de ligadura y la función de lagrange.

(c) Encuentre la frecuencia de oscilación del sistema.



Universidad del Valle- Departamento de Física
Examen de Admisión al Doctorado en Ciencias-Física

09 de Mayo de 2014

Electromagnetismo

Nombre:	

Se propone resolver uno de estos dos problemas

Problema 1.

(a) Enuncie las ecuaciones de Maxwell (en su forma diferencial) para el campo electromagnético en el vacío debido a una distribución de carga $\rho = \rho(\boldsymbol{r}, t)$ y a una densidad de corriente $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$. Explique brevemente el significado de cada una de ellas..

(b) Describa brevemente la diferencia conceptual que existe entre la formulación diferencial y la formulación integral de las ecuaciones de Maxwell.

(c) La densidad de carga $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ y la densidad de corriente $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$ están relacionadas a través de la ecuación de continuidad. Enuncie esta ecuación y explique su significado.

(d) Considere el campo electromagnético en el vacío ($\rho(\boldsymbol{r}, t)) = 0$ y $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = 0$). Muestre que el vector potencial $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ satisface la ecuación de onda

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \nabla^2 \boldsymbol{A} \qquad (1)$$

cuando $\nabla \bullet \boldsymbol{A} = 0$ (gauge de Coulomb).

(e) Resuelva la ecuación de onda (1) para el vector potencial $\boldsymbol{A}$ con condiciones periódicas de frontera en regiones del espacio definidas por cubos de lado L.

Problema 2. Se sabe que en la zona de radiación el potencial vectorial $\boldsymbol{A}$ de un dipolo oscilante $\boldsymbol{p}(t)$ en un punto M situado a una distancia r del centro del dipolo es

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{d\boldsymbol{p}(\tau)}{d\tau},$$

donde $\tau = t - \frac{r}{c}$ es el tiempo retardado. La respectiva geometría se ilustra en la Figura 1.

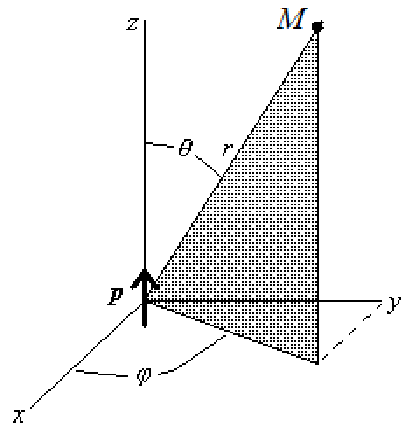


Figura 1

Suponga que en el origen se tiene un dipolo de Hertz consistente en dos esferas cargadas separadas una distancia l y conectadas a una fuente de corriente alterna $I(t)=I_0\cos(\omega t)$, tal como lo muestra la Figura 2.

(a) Demuestre que el momento dipolar de este sistema es $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{e}_z(I_0 l/\omega)\mathrm{sen}(\omega t)$.

(b) Determine los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ en la zona de radiación y calcule el respectivo vector de Poynting $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$.

(c) Determine la potencia media radiada en unidad de ángulo sólido y dibuje el respectivo diagrama polar.

(d) Determine la potencia total radiada.

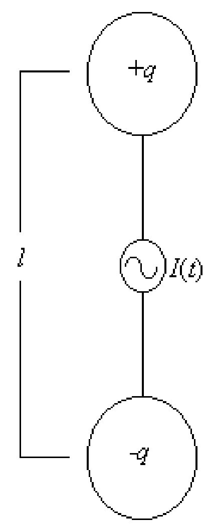


Figura 2

Universidad del Valle- Departamento de Física
Examen de Admisión al Doctorado en Ciencias-Física

09 de Mayo de 2014

Mecánica Cuántica

Nombre:	

Se propone resolver uno de estos dos problemas

Problema I — Oscilador armónico con perturbaciones

Una partícula de masa m se encuentra en presencia del potencial armónico $V_{\text{ho}}(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, y por lo tanto su dinámica se describe por el hamiltoniano

$$\hat{H}_0(x) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 .$$

(a) Sea $|n\rangle$ un estado propio de $\hat{H}_0$. ¿Cuáles son los posibles valores de n y las energías propias $E_n^{(0)}$ asociados a los estados $|n\rangle$? (No es necesario justificar la respuesta).

(b) Considere la representación en coordenadas del estado base, $\varphi_0(x) = \langle x|0\rangle$. En una gráfica esquematice la densidad de probabilidad del estado base como función de x. (No es necesario justificar la respuesta).

(c) Suponga que la partícula tiene carga q y sobre ella actúa también el potencial de un campo eléctrico constante F,

$$V_{\text{campo}} = -qFx .$$

Escriba el hamiltoniano $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_{\text{campo}}$ del sistema en términos de los operadores de creación y destrucción $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ definidos por

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}\,\hat{x} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{m\omega}}\,\hat{p}\right) ,\\ \hat{a}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}\,\hat{x} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{m\omega}}\,\hat{p}\right) .\end{aligned}$$

(d) Sea $|\alpha\rangle$ un *estado coherente*, es decir, un estado propio normalizado del operador de destrucción $\hat{a}$, donde α es el valor propio *complejo* respectivo. Calcule el valor esperado de $\hat{H}$ en este estado.

(e) El principio variacional permite encontrar una cota superior E_{min} para el estado base de $\hat{H}$. Usando el estado $|\alpha\rangle$ como función de prueba y minimizando el valor esperado encontrado en (d) muestre que

$$E_{\text{min}} = \frac{\hbar\omega}{2} - \frac{q^2F^2}{2m\omega} . \tag{1}$$

(f) Calcule el valor esperado de $\hat{x}$ en el estado base de $\hat{H}_0$ y muestre que la corrección a primer orden en teoría de perturbaciones de la energía del estado base de $\hat{H}$ es 0.

(g) Muestre que usando teoría de perturbaciones a segundo orden se encuentra para el estado base de $\hat{H}$ justamente la energía dada en (1).

Información útil:

- $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$
- Desplazamiento $\Delta E_n^{(2)}$ a segundo orden en teoría de perturbaciones de la energía $E_n^{(0)}$ de un sistema no perturbado $\hat{H}_0$ debido a una perturbación $\hat{V}$:

$$\Delta E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n} \frac{|\langle\varphi_m^{(0)}|\hat{V}|\varphi_n^{(0)}\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} , \qquad \text{con} \quad \hat{H}_0|\varphi_m^{(0)}\rangle = E_m^{(0)}|\varphi_m^{(0)}\rangle .$$

Problema II — Pozo cuadrado infinito

La energía de un sistema cuántico bidimensional está determinada por un pozo cuadrado infinito:

$$V(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq x \leq L \text{ y } 0 \leq y \leq L\,, \\ \infty, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2}$$

(a) Para una partícula de masa m en el potencial descrito arriba, encuentre los autovalores de energía y sus respectivas funciones indicando las condiciones de contorno que éstas deben obedecer.
Observación: No es necesario normalizar las autofunciones.

(b) Escriba los tres niveles más bajos de energía explicando los respectivos números cuánticos e indicando la degeneración de cada nivel si la hubiera.

(c) ¿Cómo se modifican los niveles de energía si el ancho del pozo se reduce a la mitad?

(d) El resultado del item anterior está de acuerdo con el principio de incertidumbre? Argumente.

(e) ¿Cuál es la energía total del estado fundamental del sistema cuando los niveles de energía del item (a) sean ocupados por 6 fermiones idénticos de espín $1/2$, no interactuantes, de masa m?

(f) ¿Cómo cambia el resultado del item anterior si los 6 fermiones se cambian por bosones?

(g) Considere una perturbación $\bar{V}$ al potencial (2) definido por:

$$\bar{V}(x,y) = \begin{cases} -V_0, & \text{para } L/4 \leq x \leq 3L/4 \text{ y } L/4 \leq y \leq 3L/4\,, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Usando teoría de perturbaciones a primer orden, encuentre la energía del estado base de una partícula en el potencial $V + \bar{V}$.

Universidad del Valle- Departamento de Física
Examen de Admisión al Doctorado en Ciencias-Física
09 de Mayo de 2014

Mecánica Estadística

Nombre:	

Se propone resolver uno de estos dos problemas

Problema 1.

Considere un sistema de N partículas indistinguibles en dimensión d. El hamiltoniano del sistema está dado por

$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^{N} A\, |\vec{p}_n|^r$$

en donde $\vec{p}_i$ es el momentum generalizado de la i-ésima partícula. Por su parte, A es una constante mientras que r es un entero positivo. El sistema se mantiene a una temperatura fija T y ocupa un volumen V.

- Demuestre que la función de partición está dada por

  $$Z = \frac{V^N}{N!}\left(\frac{1}{\beta A}\right)^{\frac{dN}{r}} I(d,r)^N$$

  en donde $I(d,r)$ es un factor numérico que solo depende de d y r. Encuentre explícitamente la forma de $I(d,r)$.
- Calcule el valor medio de la energía del sistema.
- Calcule la capacidad calorífica del sistema.
- Considere el caso $r = 2$ y $d = 3$, ¿coinciden con su respuestas con la que esperaría a partir del principio de equipartición de la energía?

Ayuda:
Diferencial de volumen en dimensión d:

$$dV = \frac{d\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}\, r^{d-1} dr$$

Función gamma:

$$\int_0^\infty du\, u^{d-1} e^{-u^r} = \frac{1}{r}\Gamma\left(\frac{d}{r}\right)$$

Usar sustituciones de la forma $u = p\,(\beta\, A)^{1/r}$ puede ser útil.

Problema 2. Considere una partícula libre no relativista, en un recipiente cúbico de arista L y volumen $V=L^3$.

(a) Cada uno de los estados cuánticos r de esta partícula tiene una energía cinética correspondiente ε_r que depende de V. ¿Cómo es $\varepsilon_r(V)$?

(b) Determinar la contribución a la presión del gas $p_r = -\left(\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial V}\right)$ de una partícula en este estado en función de ε_r y V.

(c) Utilizar este resultado para demostrar que la presión $\bar{p}$ de cualquier gas ideal de partículas débilmente interactivas está siempre relacionado con su energía cinética total media $\bar{E}$ por la expresión $\bar{p} = \frac{2}{3}\frac{\bar{E}}{V}$, independientemente de que el gas obedezca a la estadística de Fermi-Dirac o a la de Bose-Einstein.

(d) ¿Por qué es diferente este resultado de la relación $\bar{p} = \frac{1}{3}\frac{\bar{E}}{V}$ (válida para un gas de fotones)?

(e) Calcular la presión media $\bar{p}$ utilizando una teoría cinética semiclásica que calcula $\bar{p}$ a partir de la transferencia de la cantidad de movimiento resultante de los impactos moleculares con una pared. Demostrar que el resultado así obtenido es compatible con el deducido en *(c)* en todos los casos.