Ejemplos problemas de Mecánica Clásica

1. Un satelite orbita alrededor de la tierra a una altura h sobre su superficie. En el caso de gravedad cero en el satelite calcule:
   a) La velocidad orbital
   b) El período orbital
   Siendo R el radio de la tierra y g la aceleracion de la gravedad en la superficie, dar las respuestas en funcion de h, R y g.

2. Partiendo de la expresión $U(r) = -GMn/r$ para $r > R$, demuestre que para una masa m que se mueve desde la superficie de la tierra hasta una altura h, el cambio en la energía potencial es $\approx mgh$.

3. Considere una partícula de masa m moviendose en un plano y sujeta a la fuerza de atracción gravitacional (inversamente proporcional al cuadrado de la distancia). Hallar el Lagrangiano, las ecuaciones de movimiento y las magnitudes que se conservan.

Ejemplos problemas de Electromagnetismo

1. En los núcleos ligeros la distribución de carga se considera esférica y está dada por $\rho(r) = \rho_0\left(1 - r^2/a^2\right)$ si $r \leq a$ y $\rho(r) = 0$ si $r > a$. Suponga que m es la masa del núcleo.

(a) Si Q es la carga total Q del núcleo, exprese a través de ella la magnitud ρ_0.

(b) Determine el campo electrostático tanto en el interior ($r \leq a$) como en el exterior ($r > a$).

(c) Determine la energía electrostática de este sistema y calcule el radio para el cual esta energía es comparable con su energía en reposo.

(d) Demuestre que las componentes del tensor cuadrupolar para esta distribución de carga son nulas.

2 . Considere una onda electromagnética que se propaga en un medio con permitividad eléctrica ε, permeabilidad magnética μ y conductividad σ. *a)* Escriba las ecuaciones de Maxwell en dicho medio y a partir de ellas obtenga la ecuación de onda para el campo eléctrico. *b)* Compruebe que la solución para el campo eléctrico corresponde a una onda amortiguada. *c)* Demuestre que para conductividades pequeñas, al aumentar la frecuencia, la constante de atenuación se aproxima a un límite superior.

Ejemplos problemas de Mecánica Cuántica

1. Una caja que contiene una partícula está dividida en dos compartimientos, izquierdo y derecho, por una barrera. Si se conoce con certeza que la partícula está en el lado izquierdo, diremos que está en estado $|I\rangle$; en el caso de tener certeza de que está en el lado derecho, a dicho estado lo llamaremos $|D\rangle$.

De todos los diferentes estados posibles $|I\rangle$, correspondientes a las diferentes configuraciones en la caja, sólo consideraremos el de mínima energía; lo mismo tiene lugar para el lado derecho. De aquí tenemos un problema de dos estados.

Asuma que la caja es simétrica, en el sentido que $\langle I|\hat{H}|I\rangle = \langle D|\hat{H}|D\rangle$. Ahora corremos nuestro nivel cero de la energía de forma que $\langle I|\hat{H}|I\rangle = \langle D|\hat{H}|D\rangle = 0$. Sin embargo el Hamiltoniano no se anula por efecto túnel a través de la barrera. Este efecto túnel se caracteriza por el Hamiltoniano

$$\hat{H} = \Delta\left(|I\rangle\langle D| + |D\rangle\langle I|\right),$$

donde Δ es un número real con dimensión de energía.

(a) Encuentre los estados propios de la energía normalizados, y los correspondientes valores propios.

(b) Suponga que en el instante $t = 0$ el vector de estado está dado por

$$|\alpha(0)\rangle = c_I|I\rangle + c_D|D\rangle,$$

donde c_I y son constantes c_D. Encuentre el vector de estado posterior en el tiempo $|\alpha(t)\rangle$, aplicando el operador de evolución.

(c) Suponga que en t=0 la partícula está en el lado derecho. ¿Cuál es la probabilidad de observar la partícula en el lado izquierdo como función del tiempo?

Problema 2. Considere el movimiento de una partícula de masa m al interior de un pozo de potencial dado por

$$V(x) = \begin{cases} 0, \text{ para } -\dfrac{L}{2} < x < \dfrac{L}{2} \\ \infty \text{ para } x < -\dfrac{L}{2} \text{ y } x > \dfrac{L}{2} \end{cases}$$

(a) Determine explícitamente las energías E_n y las auto funciones normalizadas $\psi_n(x)$. ¿Cuáles son las propiedades de simetría de estas autofunciones?

(b) Demuestre que este conjunto de autofunciones forma una base ortogonal.

(c) Encuentre los valores esperados $\langle x\rangle$, $\langle p_x\rangle$, $\langle \Delta x^2\rangle$ y $\langle \Delta p_x^2\rangle$ y verifique que tiene lugar la relación de incertidumbre de Heisenberg.de la coordenada x y el moméntum p_x.

Ejemplos problemas de Mecánica Estadística

Problema 1. En el modelo de Einstein para el calor específico de sólidos los osciladores están caracterizados por un conjunto discreto de estados cuyas energías E_n están dadas por $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\Omega$, donde $\hbar = h/2\pi$, con h constante de Planck; y Ω es la frecuencia angular de los osciladores. El número n puede tomar los valores 1,2,3,...,∞.

(a) Muestre que la función de partición Z, para un oscilador, está dada por $Z = \dfrac{\exp(-\beta\hbar\Omega/2)}{1-\exp(-\beta\hbar\Omega)}$ donde $\beta = 1/kT$

(b) A partir de la anterior expresión demuestre que la energía media de un oscilador es:

$$\langle\varepsilon\rangle = \hbar\Omega\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\beta\hbar\Omega)-1}\right)$$

(c) Calcule la entropía y el calor específico del sistema como funciones de la temperatura.

(d) Examine el comportamiento del calor específico a altas y a bajas temperaturas y dibuje un gráfico de esta magnitud física en función de la temperatura.

Problema 2. Considere un gas de partículas idénticas. Suponga que en el estado k-ésimo se encuentran n_k partículas con energía ε_k. Se sabe que la función gran canónica Z de este sistema de partículas tiene la forma

$$Z = \sum_{n_1, n_2, \ldots\ldots} \exp[-\beta(n_1\varepsilon_1 + \ldots\ldots)]\exp[-\alpha(n_1 + \ldots\ldots)]$$

(a) En la estadística de Fermi-Dirac (FD) el número de ocupación del estado k-ésimo sólo puede ser cero o uno. Demuestre que en este caso $\overline{n}_k = \dfrac{1}{\exp(\alpha + \beta\varepsilon_k)+1}$.

(b) En la estadística de Bose-Einstein (BE) el número de ocupación del estado k-ésimo es arbitrario. Demuestre que en este caso $\overline{n}_k = \dfrac{1}{\exp(\alpha + \beta\varepsilon_k)-1}$.

(c) ¿Qué significa la variable α?. ¿Bajo qué condiciones se obtiene la estadística de Maxwell-Boltzmann (MB) a partir de las anteriores distribuciones?